Über die Summation von unzähligen Progressionen *

Leonhard Euler

§1 Was ich in der vorhergehenden Dissertation über transzendente Progressionen und deren allgemeine Terme angegeben habe, erstreckt sich um Vieles weiter als es scheinen könnte; und unter Anderem können äußerst viele Dinge derer, auf die es angewendet werden kann, von außerordentlichem Nutzen beim Finden von Summen unzähliger Progressionen sein. Wie nämlich in der oberen Abhandlung unzählige Progressionen auf allgemeine Terme zurückgeführt worden sind, die die allgemeine Algebra überschreiten, so werde ich hier dieselbe Methode anwenden, um die summatorischen Terme von Progressionen zu finden, um welche unbestimmt zu summieren, die gemeine Algebra nicht ausreicht.

§2 Eine gewisse Progression wird gesagt, unbestimmt summiert zu werden, wenn eine gewisse die unbestimmte Zahl n enthaltende Formel gegeben ist, welche die Summe so vieler Terme jener Progressionen, wie n Einheiten umfasst, sodass, wenn eines Beispiels wegen $n = 10$ gesetzt wird, die Formel die Summe von zehn Termen, vom ersten aus gezählt, darbietet. Diese Formel wird der *summatorische Term* jener Progression genannt und ist zugleich der allgemeine Term der Progression, von welcher irgendein Term der Summe so vielen Termn jener Progression gleich wird, wie ihr Exponent Einheiten in sich umfasst.

*Originaltitel: "De summatione innumerabilium progressionum", erstmals publiziert in „*Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5* 1738, pp. 91-105", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 14, pp. 25 - 41 ", Eneström-Nummer E20, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

§3 Weil alle Progression durch die allgemeinen Terme erklärt werden, ist die Frage über das Summieren von Progressionen diese, dass aus dem allgemeinen Term der summatorische Term gefunden wird. Und freilich ist schon bis dorthin gelangt worden, dass, sooft der allgemeine Term eine rationale Funktion des Index' n ist und die Exponenten ganze positive Zahlen sind, der summatorische Term immer gefunden werden kann. Wann immer die Exponenten von n negativ sind, wenn nicht wenige Fälle ausgenommen werden, hat bis jetzt noch niemand die summatorischen Terme angegeben. Die Begründung dieser Schwierigkeit ist, dass dann die summatorischen Terme meistens nicht algebraische ausgedrückt werden können, sondern solche Formen verlangen, die Quadraturen in sich enthalten.

§4 Es werde diese Form

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

als allgemeiner Term einer gewissen allgemeinen Progression angenommen; diese gäbe natürlich so integriert, dass sie $=0$ wird, wenn $x=0$ ist, und nach Setzen von $x=1$ den Term der Ordnung n. Die Progression, die auf diese Weise aus ihr gebildet wird, wird diese sein

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term also die angenommene Form selbst ist

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx.$$

Aber diese gefundene Reihe ist die summatorische der harmonischen Progression

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5} \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term $\frac{1}{n}$ ist. Deswegen wird der summatorische Term dieser Progression auch sein

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx,$$

welcher der allgemeine Term von jener ist.

§5 Weil der allgemeine Term der Progression

$$1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \quad \text{etc.}$$

ja damit dieser ist

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}\,dx,$$

wird aus diesem die Progression interpoliert werden oder jeder beliebige Mittelterm gefunden werden können; wie wenn der Term verlangt wird, dessen Index $\frac{1}{2}$ ist, wird Nachstehendes integriert werden müssen

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}dx \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{1+\sqrt{x}},$$

dessen Integral ist

$$2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x});$$

weil dies $=0$ wird, wenn $x=0$ wird, werde $x=1$ gesetzt; es wird der Term der Ordnung $\frac{1}{2}$ damit $=2-2\log 2$ sein. Des Weiteren, weil allgemein der Term der Ordnung $n+1$ der Term der Ordnung n um den Bruch $\frac{1}{n+1}$ überschreitet, wird der Term der Ordnung $1\frac{1}{2} = 2\frac{2}{3} - 2\log 2$ und der Term der Ordnung $2\frac{1}{2}$ dieser $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - 2\log 2$ sein etc. Die interpolierte Reihe wird also sein

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & 1 & 1\frac{1}{2} & 2 & 2\frac{1}{2} \\ 2-2\log 2, & 1, & 2+\frac{2}{3}-2\log 2, & 1+\frac{1}{2}, & 2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2\log 2 \quad \text{etc.} \end{array}$$

§6 Auf diese Weise habe ich die Sache allgemeiner aufgefasst und habe diese Formel angenommen

$$\int \frac{1-P^n}{1-P}\,dx,$$

wo P irgendeine Funktion von x bezeichnet. Dieses Integral, wie immer, muss so angenommen werden, dass das ganze, nachdem $x = 0$ gesetzt worden ist, $= 0$ wird. Darauf setze ich hier nicht wie zuvor, $x = 1$, sondern, damit es sich weiter erstreckt, setze ich $x = k$. Die auf diese Weise resultierende Form wird der Term der Ordnung n einer gewissen Progression sein, deren allgemeiner Term die angenommene Form selbst ist, also

$$\int \frac{1-P^n}{1-P}\,dx.$$

Die Progression selbst wird hingegen diese sein

$$k, \quad k + \int P\,dx, \quad k + \int P\,dx + \int P^2 dx \quad \text{etc.};$$

wo ich festlege, dass in den Integralen $\int P\,dx$, $\int P^2 dx$ anstelle von x schon k gesetzt worden ist.

§7 Die gefundene Progression, wenn jeder Term vom folgenden subtrahiert wird, wird diese liefern

$$k, \quad \int Pdx, \quad \int P^2dx, \quad \int P^3dx \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\int P^{n-1}dx.$$

Und von dieser ist der summatorische Term dem allgemeinen Term der vorhergehenden Progression gleich, welche diese Formel $\int \frac{1-P^n}{1-P}dx$. erklärt.

Es sei $P = x^\alpha : a^\alpha$; es wird also der allgemeine Term dieser Progression

$$k, \quad \frac{k^{\alpha+1}}{(\alpha+1)a^\alpha}, \quad \frac{k^{2\alpha+1}}{(2\alpha+1)a^{2\alpha}} \quad \text{etc.}$$

sein

$$\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}}$$

und der summatorische Term dieser

$$\int \frac{a^{n\alpha} - x^{n\alpha}}{(a^\alpha - x^\alpha)a^{n\alpha-\alpha}}dx.$$

§8 Es ist also der summatorische Term für alle Progressionen gefunden worden, deren Terme Brüche sind und die Zähler von diesen dann eine geometrische, die Nenner hingegen eine arithmetische Progression festlegen.

Damit er aber leichter an alle Fälle angepasst werden kann, werde diese Progression genommen

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{b^{i+1}}{c+e}, \quad \frac{b^{2i+1}}{c+2e}, \quad \frac{b^{3i+1}}{c+3e} \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{b^{(n-1)i+1}}{c+(n-1)e};$$

dieser werden nun mit jenem verglichen

$$\frac{k^{(n-1)\alpha+1}}{(1+(n-1)\alpha)a^{(n-1)\alpha}} \quad \text{oder} \quad \frac{ck^{(n-1)\alpha+1}}{(c+(n-1)\alpha c)a^{(n-1)\alpha}};$$

es wird sein

$$\alpha = \frac{e}{c} \quad \text{und} \quad \frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{a^{\frac{(n-1)e}{c}}} = b^{(n-1)i+1}$$

und

$$a = \left(\frac{ck^{\frac{(n-1)e}{c}+1}}{b^{(n-1)i+1}}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} = \left(\frac{ck}{b}\right)^{\frac{c}{(n-1)e}} \frac{k}{b^{ci:e}}.$$

Hier, damit a nicht von n (es muss nämlich a eine konstante Größe sein), ist es von Nöten, dass $\frac{ck}{b} = 1$ ist, es wird also $k = \frac{b}{c}$ sein und

$$a = \frac{b^{\frac{e-ci}{e}}}{c}.$$

Deshalb ist der summatorische Term

$$\int \frac{b^{\frac{ne-nci}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e-ci)}{c}} \left(b^{\frac{e-ci}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}\right)} dx.$$

Diese Form muss so integriert werden, dass sie $= 0$ wird, wenn $x = 0$ ist; dann aber muss $x = \frac{b}{c}$ gesetzt werden.

§9 Nachdem die unbestimmte Summe der Progression bekannt geworden ist, wird man die Summe der Progression bis ins Unendliche haben, wenn $n = \infty$ gesetzt wird. Der gefundene summatorische Term scheint freilich mehr an diesen Fall als an irgendeinen angepasst. Ich habe in der Tat eine andere Methode, die Summen von unendlichen Reihen ausfindig zu machen, die sich sehr weit erstreckt. Es sei die Reihe

$$\frac{b}{c} + \frac{b^{i+1}}{c+e} + \frac{b^{2i+1}}{c+2e} + \text{etc.}$$

Die Anzahl der Terme werde n und die Summe derer A gesetzt. Die Anzahl n werde um eine Einheit vermehrt; es wird die Summe A um den Term der Ordnung $n+1$ vermehrt werden, welcher $\frac{b^{ni+1}}{c+ne}$ ist. Wenn nun n und A als fließende Größen zu betrachtet werden, weil n quasi unendlich mal größer ist als 1, werden deren Differentiale dn und dA zueinander stehen wie die Zuwächse 1 und $\frac{b^{ni+1}}{c+ne}$. Daher geht diese Gleichung hervor

$$dA = \frac{b^{ni+1} dn}{c+ne}.$$

Diese wird integriert eine Gleichung zwischen der Summe A und der Anzahl der Terme N geben.

§10 Man setze

$$\log(c+ne) = z;$$

es wird

$$\frac{edn}{c+ne} = dz$$

und $c + ne = g^z$ sein, während g die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus 1 ist. Es ist also

$$n = \frac{g^z - c}{e} \quad \text{und} \quad b^{ni+1} = b^{\frac{g^z i - ci + e}{e}} = b^{\frac{e-ci}{e}} b^{\frac{g^z i}{e}},$$

als logische Konsequenz

$$dA = \frac{b^{\frac{e-ci}{e}}}{e} b^{\frac{g^z i}{e}} dz.$$

Diese so allgemeine aufgestellte Gleichung lässt freilich nur eine Integration durch unendliche Reihen zu. Wenn aber $i = 0$ gesetzt wird, dass diese Reihe hervorgeht

$$\frac{b}{c} + \frac{b}{c+e} + \frac{b}{c+2e} + \text{etc.},$$

wird man diese Gleichung haben

$$dA = \frac{b}{e}dz \quad A = \frac{b}{e}(z + \log C) = \frac{b}{c}\log C(c+ne).$$

Die Konstante C wird freilich nicht bestimmt, aber dennoch dient die Gleichung zur Bestimmung der Differenz zwischen zwei Summen; es sei die andere Anzahl der Terme m und die Summe B; es wird sein

$$B = \frac{b}{c} \log C(c + me).$$

Also

$$B - A = \frac{b}{e} \log \frac{c + me}{c + ne} = \frac{b}{e} \log \frac{m}{n},$$

weil m und n unendlich sind.

§11 Es bleibe $i = 0$ und die Progression wird diese sein

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{b}{c+e}, \quad \frac{b}{c+2e}, \quad \frac{b}{c+3e} \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{b}{c + (n-1)e}.$$

Aber der summatorische Term ist

$$\int \frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)e}{c}} \left(b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}} \right)} dx.$$

Es werde eine andere Progression genommen

$$\frac{b}{c}, \quad \frac{b}{c+f}, \quad \frac{b}{c+2f}, \quad \frac{b}{c+3f} \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{b}{c+(n-1)f}$$

und der summatorische

$$\int \frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{(n-1)f}{c}}\left(b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}\right)} dx,$$

in welchem integriertem ebenso $x = k = \frac{b}{c}$ gesetzt werden muss. Diese zwei Progressionen werden addiert, natürlich der erste Term zum ersten, der zweite zum zweiten, und so weiter; es wird diese Progression hervorgehen

$$\frac{2b}{c}, \quad \frac{2bc+b(e+f)}{(c+e)(c+f)}, \quad \frac{2bc+2b(e+f)}{(c+2e)(c+2f)} \quad \text{etc.,}$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{2bc+(n-1)b(e+f)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}.$$

Der summatorische Term wird hingegen sein

$$= \int dx \left(\frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{(n-1)e}{c}}\left(b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}\right)} + \frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{(n-1)f}{c}}\left(b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}\right)} \right).$$

§12 Auf die gleiche Weise, aber allgemeiner, wird für den allgemeinen Term, in dessen Nenner n zwei Dimensionen einnimmt, der summatorische Term gefunden, wenn das $p-$fache jener Progression zum $q-$fachen dieser addiert wird. Es wird auf diese Weise eine Progression erhalten, deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{pb}{c+(n-1)e} + \frac{qb}{e+(n-1)f} = \frac{(p+q)bc+(n-1)b(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}.$$

Aber der diesem allgemeinen Term entsprechende summatorische Term wird sein

$$\int \frac{pdx}{b^{\frac{(n-1)e}{c}}} \left(\frac{b^{\frac{ne}{c}} - c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}}}{b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}} \right) + \int \frac{qdx}{b^{\frac{(n-1)f}{c}}} \left(\frac{b^{\frac{nf}{c}} - c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}}}{b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}} \right)$$

$$= \int dx \left\{ \begin{array}{cc} & \dfrac{pb^{\frac{n(e+f)}{c}} - px^{\frac{n(e+f)-f}{c}} c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}} - pb^{\frac{nf}{c}} c^{\frac{ne}{c}} x^{\frac{ne}{c}} + pb^{\frac{(n-1)f}{c}} c^{\frac{ne+f}{c}} x^{\frac{ne+f}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e+f)}{c}} \left(b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}\right)\left(b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}\right)} \\ + & \dfrac{qb^{\frac{n(e+f)}{c}} - qb^{\frac{n(e+f)-e}{c}} c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}} - qb^{\frac{ne}{c}} c^{\frac{nf}{c}} x^{\frac{nf}{c}} + qb^{\frac{(n-1)e}{c}} c^{\frac{nf+e}{c}} x^{\frac{nf+e}{c}}}{b^{\frac{(n-1)(e+f)}{c}} \left(b^{\frac{e}{c}} - c^{\frac{e}{c}} x^{\frac{e}{c}}\right)\left(b^{\frac{f}{c}} - c^{\frac{f}{c}} x^{\frac{f}{c}}\right)} \end{array} \right\}.$$

Es werde $b = 1$ gesetzt, auf diese Weise geht nämlich an Allgemeinheit nichts verloren, und es wird der allgemeine Term sein

$$\frac{(p+q)c+(n-1)(pf+qe)}{(c+(n-1)e)(c+(n-1)f)}.$$

Es sei $cx = y$; es wird gelten

$$dx = \frac{dy}{c}.$$

Und man hat als summatorischen Term

$$= \int \frac{dy}{c} \left(\frac{p + q - py^{\frac{f}{c}} - qy^{\frac{e}{c}} - py^{\frac{ne}{c}} - qy^{\frac{nf}{c}} + y^{\frac{ne+f}{c}} + qy^{\frac{nf+e}{c}}}{\left(1 - y^{\frac{e}{c}}\right)\left(1 - y^{\frac{f}{c}}\right)} \right)$$

in welcher so integrierten Formel, dass sie nach Setzen von $y = 0$ auch $= 0$ wird, $y = 1$ gesetzt werden muss.

§13 Es werde nun dieser allgemeine Term angenommen

$$\frac{\alpha + \beta n}{\gamma + \delta n + \varepsilon nn}.$$

Dieser wird mit

$$\frac{(p+q)c + (n-1)(pf + qe)}{(c + (n-1)e)(c + (n-1)f)}$$

verglichen geben

$$c = \sqrt{\gamma + \delta + \varepsilon}, \quad e = \frac{\delta + 2\varepsilon + \sqrt{\delta\delta - 4\gamma\varepsilon}}{2\sqrt{\gamma + \delta + \varepsilon}}, \quad e = \frac{\delta + 2\varepsilon - \sqrt{\delta\delta - 4\gamma\varepsilon}}{2\sqrt{\gamma + \delta + \varepsilon}},$$

$$p = \frac{\alpha\delta - \beta\delta + 2\alpha\varepsilon - 2\beta\gamma + (\alpha + \beta)\sqrt{\delta\delta - 4\gamma\varepsilon}}{2\sqrt{(\gamma + \delta + \varepsilon)(\delta\delta - 4\gamma\varepsilon)}}$$

und

$$q = \frac{\beta\delta - \alpha\delta + 2\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon + (\alpha + \beta)\sqrt{\delta\delta - 4\gamma\varepsilon}}{2\sqrt{(\gamma + \delta + \varepsilon)(\delta\delta - 4\gamma\varepsilon)}}.$$

Nachdem diese in den summatorischen eingesetzt worden sind, wird der summatorische Term dieser Progression hervorgehen als

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta+\varepsilon}, \quad \frac{\alpha+2\beta}{\gamma+\delta+4\varepsilon}, \quad \frac{\alpha+3\beta}{\gamma+\delta+9\varepsilon} \quad \text{etc.},$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{\alpha+n\beta}{\gamma+\delta+nn\varepsilon}.$$

§13[a] Auf dieselbe Weise, wenn im allgemeinen Term n mehr als zwei Dimensionen hatte, wird der summatorische Term gefunden werden, indem so viele einfache Progressionen kombiniert werden, wie n Dimensionen hat, wie selbiges im Fall von zwei Dimensionen gemacht worden ist. Aber dennoch kann auf diese Weise nicht zu jeglichen Reihen, die in den allgemeinen Termen von dieser Art enthalten zu sein scheinen, gelangt werden. Denn sooft der Nenner $\gamma+\delta n+\varepsilon n^2+\zeta n^3+\eta n^4$+etc. zwei oder mehr gleiche einfache Faktoren hat, kann dann die Progression nicht in so viele einfache Progressionen aufgelöst und daher auch nicht ihr summatorischer Term gefunden werden.

§14 Dieses Grundes wegen möchte ich eine Methode angeben, welche diese Fälle nicht ausschließt. Es sei die gewisse einfach Progression

$$\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{a+2b} \quad \text{etc.}$$

deren allgemeiner Term ist

$$\frac{1}{a+(n-1)b}.$$

Der summatorische Term von dieser wird sein

$$\int \frac{1 - a^{\frac{nb}{a}} x^{\frac{nb}{a}}}{1 - a^{\frac{b}{a}} x^{\frac{b}{a}}} dx,$$

oder es werde $ax = y$ gesetzt; er wird sein

$$\int \frac{1 - y^{\frac{nb}{a}}}{1 - y^{\frac{b}{a}}} \cdot \frac{dy}{a}$$

in welchem integrierten $y = 1$ gesetzt werden muss. Dieser werde mit $y^{\alpha} dy$ multipliziert und die Summe dieses Produktes

$$\int y^{\alpha} dy \int \frac{dy}{a} \cdot \frac{1 - y^{\frac{nb}{a}}}{1 - y^{\frac{b}{a}}}$$

wird gemäß der beschriebenen Weise behandelt der summatorischen dieser Progression sein

$$\frac{a}{a \cdot \beta a}, \quad \frac{a}{(a+b)(\beta a + b)}, \quad \frac{a}{(a+2b)(\beta a + 2b)} \quad \text{etc.,}$$

nachdem der Kürze wegen also β anstelle von $\alpha + 2$ gesetzt worden ist. Der allgemeine Term dieser Progression ist

$$\frac{a}{(a+(n-1)b)(\beta a + (n-1)b)} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b^2 n^2 + (ab + \beta ab - 2bb)n + (a-b)(\beta a - b)}.$$

§15 Wir wollen eine allgemeine Progression dieses Geschlechts annehmen, welche leichter an die entsprechenden Fälle angepasst wird; es sei ihr allgemeiner Term

$$\frac{1}{a+(n-1)b+\frac{(n-1)(n-2)}{2}c}.$$

Dieser wird mit jenem allgemeinen Term verglichen geben

$$\begin{aligned}
a &= \frac{(2b-c)^2-4ac+(2b-c)\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}{4c},\\
b &= \frac{2b-c-4ac+\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}{4},\\
\beta &= \frac{2b-c-\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}{2b-c+\sqrt{(2b-c)^2-8ac}}.
\end{aligned}$$

Wenn diese Werte anstelle von a, b und α (es ist ja $\alpha=\beta-2$) in nachstehender Formel eingesetzt werden

$$\int y^\alpha dy \int \frac{dy}{a}\cdot\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}},$$

wird der summatorische Term der vorgelegten Progression hervorgehen

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a+b},\quad \frac{1}{a+2b+c},\quad \frac{1}{a+3b+3c}\quad \text{etc.}$$

§16 Auf diese Weise lässt sich weiter fortschreiten; es werde

$$\int \frac{dy}{a}\cdot\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}$$

mit $y^{\alpha-2}dy$ multipliziert und das Integral des Produktes

$$\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a}\cdot\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}$$

erneut mit $y^{\beta-\alpha-1}$ und das Integral dieses Produktes

$$\int y^{\beta-\alpha-1}dy\int y^{\alpha-2}\int\frac{dy}{a}\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}$$

wird der summatorische Term dieser Progression sein

$$\frac{a^2}{a\cdot\alpha a\cdot\beta a},\quad\frac{a^2}{(a+b)(\alpha a+b)(\beta a+b)},\quad\frac{a^2}{(a+2b)(\alpha a+2b)(\beta a+2b)}\quad\text{etc.,}$$

deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{a^2}{(a+(n-1)b)(\alpha a+(n-1)b)(\beta a+(n-1)b)};$$

gleichermaßen ist

$$\int y^{\gamma-\beta-1}dy\int y^{\beta-\alpha-1}dy\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a}\cdot\frac{1-y^{\frac{nb}{a}}}{1-y^{\frac{b}{a}}}$$

ist der summatorische Term der Progression, deren allgemeiner Term dieser ist

$$\frac{a^3}{(a+(n-1)b)(\alpha a+(n-1)b)(\beta a+(n-1)b)(\gamma a+(n-1)b)}.$$

Auf diese Weise wird also zu allen Progressionen gelangt, deren Terme Brüche sind, während die Zähler konstante Zahlen sind, die Nenner aber irgendeine algebraische Progression festlegen.

§17 Wenn die Summen von ins Unendliche fortgesetzten Progressionen von dieser Art verlangt werden, muss $n =$ Unendlich festgelegt werden. Nachdem dies festgelegt worden ist, wird dass letzte Glied eines jeden summatorischen Termes, natürlich

$$\int \frac{dy}{a} \cdot \frac{1 - y^{\frac{nb}{a}}}{1 - y^{\frac{b}{a}}},$$

in dieses verwandelt werden

$$\int \frac{dy}{a\left(1 - y^{\frac{b}{a}}\right)}.$$

Weil nämlich y immer, außer im letzten Fall, in welchem $y = 1$ wird, kleiner ist als 1 ist, wird $y^{\frac{nb}{a}}$ in Bezug auf 1 verschwinden und daher $1 - y^{\frac{nb}{a}}$ in 1 übergehen. Deshalb wird die Summe dieser Reihe

$$\frac{a}{a \cdot \alpha a} + \frac{a}{(a+b)(\alpha a + b)} + \frac{a}{(a+2b)(\alpha a + 2b)} + \text{etc. bis ins Unendliche}$$

sein

$$\int y^{\alpha - 2} dy \int \frac{dy}{a\left(1 - y^{\frac{b}{a}}\right)}$$

und die Summe von dieser

$$\frac{a}{a \cdot \alpha a \cdot \beta a} + \frac{a}{(a+b)(\alpha a + b)(\beta a + b)} + \frac{a}{(a+2b)(\alpha a + 2b)(\beta a + 2b)} + \text{etc.}$$

wird sein

$$\int y^{\beta-\alpha-1}\int y^{\alpha-2}dy\int\frac{dy}{a(1-y^{\frac{b}{a}})}$$

und so über alle übrigen.

§18 Es sei $b=a$, dass $\frac{b}{a}=1$ wird; es wird sein

$$\int\frac{dy}{a(1-y)}=A-\frac{1}{a}\log(1-y).$$

Weil nach Setzen von $y=0$ das ganze Integral $=0$ werden muss, wird auch $A=0$ sein und daher

$$\int\frac{dy}{a(1-y)}=-\frac{1}{a}\log(1-y).$$

Dieses werde mit $y^{\alpha-2}dy$ multipliziert; man wird haben

$$-\frac{y^{\alpha-2}dy}{a}\log(1-y).$$

Um das Integral von diesem Ausdruck zu finden, setze man $1-y=z$; es wird $y=1-z$ sein; man wird also dies zu integrieren haben

$$\frac{(1-z)^{\alpha-2}dz}{a}\log z$$
$$=\left(1-\frac{\alpha-2}{1}z+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot2}z^2-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1\cdot2\cdot3}z^3+\text{etc.}\right)\frac{dz}{a}\log z.$$

Weil ja aber gilt

$$\int z^{\eta}dz\log z=C-\frac{z^{\eta+1}}{(\eta+1)^2}+\frac{z^{\eta+1}\log z}{\eta+1},$$

wird das Integral von jener diese Reihe sein

$$\frac{1}{a}\left(C - z + z\log z + \frac{\alpha-2}{1\cdot 4}z^2 - \frac{\alpha-2}{1\cdot 2}z^2\log z - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9}z^3 + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\log z + \text{etc.}\right).$$

Dieses Integral, wenn $y = 0$ oder $z = 1$ wird, muss $= 0$ werden; dieser Sache wegen wird sein

$$C = 1 - \frac{\alpha-2}{1\cdot 4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9} - \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 16} + \text{etc.}$$

§19 Es ist klar, dass aus diesem Integral, sooft α eine ganze Zahl größer als die Einheit ist, dann immer die Anzahl der Terme ihres Integrals immer endlich sein wird und daher die Summe der Progression definiert wird. Aber dennoch, auch wenn die Anzahl der Terme unendlich ist, wird die Summe der vorgelegten Reihe durch eine andere unendliche Reihe gegeben sein, die hingegen schneller konvergiert als die vorgelegte selbst und daher mehr als nützlich ist, um die Summe zu bestimmen.

§20 Es sei die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Progression

$$\int \frac{-y^{\alpha-2}}{a}dy\log(1-y);$$

weil hier $b = a$ gesetzt worden ist, wird die Progression selbst sein

$$\frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{2(\alpha+1)a} + \frac{1}{3(\alpha+2)a} + \frac{1}{4(\alpha+3)a} + \text{etc.}$$

Man hat die Summe von dieser, wenn in jenen Integral $y = 1$ gesetzt wird, aber nach Setzen von $y = 1 - z$ ist jenes Integral

$$\frac{1}{a}\left\{\begin{array}{c} 1 - \frac{\alpha-2}{1\cdot 2} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9} - \text{etc.} - z + \frac{\alpha-2}{1\cdot 4}z^2 + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9}z^3 + \text{etc.} \\ + z\log z - \frac{\alpha-2}{1\cdot 2}z^2\log z + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 3}z^3\log z - \text{etc.} \end{array}\right\}.$$

Wenn nun $y = 1$ oder $z = 0$ wird, wird die Summe der Reihe

$$\frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{2(\alpha+1)a} + \frac{1}{3(\alpha+2)a} + \text{etc.}$$

der Summe dieser Reihe gleich sein

$$\frac{1}{a} - \frac{\alpha-2}{1\cdot 4\cdot a} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9\cdot a} - \text{etc.},$$

oder die Summe von dieser Reihe

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2(\alpha+1)} + \frac{1}{3(\alpha+2)} + \text{etc.}$$

wird der Summe dieser gleich sein

$$1 - \frac{\alpha-2}{1\cdot 4} + \frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9} - \text{etc.}$$

§21 Außerdem habe ich eine Art, sehr schnell konvergierende Reihen zu finden, deren Summe der vorgelegten Reihe gleich ist.

$$\int -y^{\alpha-2}dy\log(1-y)$$

wird so integriert, dass es $= 0$ wird, wenn $y = 0$ ist, dieser Reihe gleich

$$\begin{gathered}
1-\frac{\alpha-2}{1\cdot 2}+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9}-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 16}+\text{etc.}\\
-z+\frac{\alpha-2}{1\cdot 2}z^2-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9}z^3+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 16}z^4-\text{etc.}\\
+z\log z-\frac{\alpha-2}{1\cdot 2}z^2\log z+\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)}{1\cdot 2\cdot 9}z^3\log z-\frac{(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 16}z^4\log z+\text{etc.},
\end{gathered}$$

während $z = 1 - y$ ist; aber weil gilt

$$-\log(1-y) = y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4}+\text{etc.},$$

wird sein

$$\int -y^{\alpha-2}dy\log(1-y) = \frac{y^\alpha}{\alpha}+\frac{y^{\alpha+}}{2(\alpha+1)}+\frac{y^{\alpha+2}}{3(\alpha+2)}+\text{etc.}$$

Diese Reihe, wenn α eine positive Zahl ist, ist jener gleich, was auch immer y ist; und so werden auf viele Arten die Reihen derselben Summe aufgefunden, von denen die eine mit Hilfe der anderen leichter summiert wird.

§22 Ich werde die Sache an einem Beispiel illustrieren. Es sei $\alpha = 1$; man wird eine dieser nachstehenden gleiche Summe der drei folgenden Reihen haben

$$\begin{gathered}
+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.}\\
-z-\frac{1}{4}zz-\frac{1}{9}z^3-\frac{1}{16}z^4-\text{etc.}
\end{gathered}$$

$$+z\log z + \frac{1}{2}z^2\log z + \frac{1}{3}z^3\log z + \text{etc.}$$
$$= \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \text{etc.}$$

Weil aber ist

$$z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{3}z^3 + \text{etc.} = -\log(1-z) = -\log y,$$

wird sein

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{y+z}{1} + \frac{y^2+z^2}{1} + \frac{y^3+z^3}{9} + \frac{y^4+z^4}{16} + \text{etc.} + \log y \log z;$$

es ist hier $y + z = 1$, und es offenbar, dass anstelle von y oder z solche Zahlen angenommen werden können, dass die Reihe sehr stark konvergiert. Das passiert aber, wann immer $y = z$ oder jeder der beiden $= \frac{1}{2}$ ist, und es wird in diesem Fall sein

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + \frac{1}{128} + \frac{1}{400} + \text{etc.} + \square \log 2.$$

Auf diese Weise kann die Summe der Progression

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

sehr nahe erhalten werden; denn es ist

$$\log 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} + \text{etc.}$$

Die Summe der Progression

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

ist sehr nahe $= 1,164481$ und dazu gilt

$$\square \log 2 = 0,480453;$$

also ist die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$$

nahezu exakt

$$= 1,644934.$$

Wenn jemand aber die Summe dieser Reihe durch Addieren einiger Anfangsterme bestimmen wollte, müsste er mehr als tausend Terme addieren, dass er unseren gefunden Werte auffände.

§23 Aus diesen Dingen ist es also möglich eine Methode abzuleiten, wie von jeder beliebigen Progression, deren Terme Brüche sind, deren Nenner irgendeine algebraische Progression festlegen, der summatorische Term gefunden werden muss. Allerdings müssten, wie wir diese Sache betrachtet haben, die Zähler konstante Größen sein; aber nicht schwer wird diese Methode auch auf die Progressionen ausgedehnt, in denen die Zähler ebenfalls eine algebraische Progression ergeben. Deshalb kann diese Methode auf alle Progressionen, deren allgemeine Terme algebraisch erklärt werden können, angewendet werden und mit ihrer Hilfe die summatorischen gefunden werden. Es sind dennoch die Fälle auszunehmen, in den der allgemeine Term irrational ist.